LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 2

1. Finden Sie jeweils alle reellen 2×2-Matrizen B für die $AB = BA$ gilt:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$;
d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Man zeige, dass man bei der Multiplikation dermatrizen nicht verkürzen darf, d.h. man finde z. B. reelle 2×2-Matrizen A, B, C, mit $A \neq 0$, so dass $AB = AC$ aber $B \neq C$.

3. a) Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring, so bezeichnet man

$$Z(R) = \{x \in R \mid xa = ax \text{ für jedes } a \in R\}.$$

Man zeige, dass $Z(R)$ ein Unterring von R ist. (Der Unterring $Z(R)$ heißt das Zentrum des Ringes R.)
b) Man bestimme $Z(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$.

4. Ist es wahr, dass ein Unterring eines Ringes der sogar ein Körper ist, auch ein Körper ist?

5. Nennt man *quadrat-frei* eine ganze Zahl d mit der Eigenschaft dass keine Primzahl p existirt, so dass $p \mid d$. Für so eine quadrat-freie Zahl $d \in \mathbb{Z}$, betrachte man

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$M(d) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Man zeige, dass:

a) $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist.
b) $M(d)$ ein Untering von $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist.
c) Die Ringe $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$ und $M(d)$ isomorph sind.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`